FEUILLE DE TD

E.v. et décomposition polaire

Espaces vectoriels

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

1. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 4y = 0\}$
2. $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 4y = 1\}$
3. $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 4y \geq 0\}$
4. $F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$
5. $F_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}$
6. $F_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{N}\}$

Exercice 2. Montrer que les seuls sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$ sont $\{0\}$ et $\mathbb{R}$.

Exercice 3.

1. La famille $((1, 2, 1), (1, 1, 3), (3, -2, 1))$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$?
2. La famille $((1, 0, 3), (0, 1, 2), (2, -3, 0))$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 4.
Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$ et $G = \text{vect}\,((1, 1, 0), (1, 0, 0))$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et donner une base de $F \cap G$.

Exercice 5.
Soit $\mathcal{P} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x)\}$ l'ensemble des fonctions paires et $\mathcal{I} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -f(-x)\}$ l'ensemble des fonctions impaires. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 6. Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E. A-t-on nécessairement $H \cap (F + G) = (H \cap F) + (H \cap G)$?

Exercice 7. Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E tels que $F \oplus G = E$ et $F \subset H$. Montrer que $H = F \oplus (G \cap H)$.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que vaut $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$?

Exercice 9. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, avec $\dim E = n$.

1. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F + \dim G > n$. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.
2. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de E. Déterminer $\dim(H_1 \cap H_2)$.

Exercice 10. On définit pour $k \in \mathbb{N}^*$ la fonction $f_k : x \mapsto \sin(kx)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 11. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère :

$$F = \left\{ f \in E \mid \int_0^1 f(t)dt = 0 \right\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et trouver un supplémentaire de E.

Exercice 12.
Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $f_{a,b} : x \mapsto a\cos(x + b)$. Soit $E = \{f_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et en donner une base.

Exercice 13. Soit $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$ et $e = (1, 1, 1, 1)$.

1. Donner une base du sous-espace vectoriel H et sa dimension.
2. Montrer que H et $\text{vect}(e)$ sont supplémentaires.
3. Si $a \in \mathbb{K}^4 \setminus H$, montrer que H et $\text{vect}(a)$ sont encore supplémentaires.

Exercice 14. Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Montrer qu'il existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que la famille $(e_1, \ldots, e_{n-1}, e'_j)$ soit encore une base de E.

Exercice 15. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ des nombres distincts deux à deux. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on pose $f_i : x \mapsto e^{\lambda_i x}$.
Montrer que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre, en utilisant les résultats sur les espaces vectoriels.
En utilisant les résultats sur la réduction, et avec $D : f \mapsto f'$, montrer que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.

Exercice 16. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. Soit $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes linéaires sur E. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.
   Montrer qu'il existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que pour tout $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ on a $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$.
2. Montrer que la famille $(a_1, \ldots, a_n)$ est unique.
3. On définit $\phi : f \mapsto (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$.
   Montrer que ϕ est une application linéaire.
4. Montrer que ϕ est injective.
5. Montrer que $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$ sont isomorphes.
6. Montrer qu'il existe une base $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ telle que $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$. (où $\delta_{\cdot,\cdot}$ est le symbole de Dirac)
   Cette base est appelée la **base duale** de $(e_1, \ldots, e_n)$.
7. Soit $(g_1, \ldots, g_n)$ une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.
   Montrer qu'il existe $(h_1, \ldots, h_n)$ une base de E telle que $g_i = h_i^*$.
   On pourra prendre une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E, sa base duale $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, et écrira la matrice de $(g_1, \ldots, g_n)$ dans $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$.

Exercice 17. Soit $\mathbb{K}$ un corps. Soit L un corps contenant $\mathbb{K}$ (on pensera à $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$). Soit $x \in L$.
On dit que x est **algébrique sur** $\mathbb{K}$ s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non-nul tel que $P(x) = 0$.

1. Soit $x \in L$ qui est algébrique sur $\mathbb{K}$.
   On pose $\mathbb{K}(x) = \{Q(x) \, Q \in \mathbb{K}[X]\}$.
   Montrer que $\mathbb{K}(x)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. Montrer que $\mathbb{K}(x)$ est de dimension finie.
3. On définit $f_x : P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(x)$.
   Montrer que f_x est une application linéaire.
   Montrer que f_x est un morphisme d'anneaux.
4. Soit Q un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ tel que $Q(x) = 0$ qui est unitaire et de degré minimal.
   Montrer que l'on a $P(x) = 0 \Leftrightarrow Q|P$.
5. En déduire que Q est unique.
   On note alors $Q = Irr(x, \mathbb{K})$, le **polynôme minimal** de x sur $\mathbb{K}$.
6. Montrer que Q est un polynôme irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.
7. Déterminer $Ker(f_x)$.
8. Déterminer $Irr(\sqrt{2}, \mathbb{Q})$, $Irr(\exp(\frac{2i\pi}{3}), \mathbb{Q})$, $Irr(\sqrt{2}, \mathbb{R})$, $Irr(\exp(\frac{i\pi}{3}), \mathbb{R})$.
9. Soit $d = \deg(Irr(x, \mathbb{K}))$.
   Montrer que $\mathbb{K}(x) = Vect(1, x, x^2, \ldots, x^{d-1})$.
10. Montrer que $\dim(\mathbb{K}(x)) = d$.
11. Réciproquement, soit $x \in L$ tel que $\mathbb{K}(x)$ est de dimension finie.
    Montrer que x est algébrique sur $\mathbb{K}$.
12. Si x est algébrique sur $\mathbb{K}$ et non-nul, montrer que $\frac{1}{x}$ est algébrique sur $\mathbb{K}$.
13. Soient $x, y \in L$ deux éléments algébriques sur $\mathbb{K}$.
    On pose $\mathbb{K}(x, y) = Vect(x^k, y^l, \, k, l \geq 0)$. (le sous-anneau engendré par $\mathbb{K}$, x, et y)
14. Montrer que $\mathbb{K}(x, y)$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
15. Montrer que $\dim(\mathbb{K}(x, y)) \leq \dim(\mathbb{K}(x)) \dim(\mathbb{K}(y))$.
16. Déterminer la dimension de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ et de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \exp(2i\pi 3)$.
17. En déduire que si x et y sont algébriques sur $\mathbb{K}$, alors $x + y$ et xy sont algébriques sur $\mathbb{K}$.

■ *Dev : Décomposition polaire* ■

Exercice 18 (Décomposition polaire). Soient $n \geq 1$ et $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

1. **Existence et unicité :**

(a) Montrer que ${}^tAA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

(b) Montrer qu'il existe une matrice $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

(c) On pose $O = AB^{-1}$. Montrer que $O \in O_n(\mathbb{R})$.

(d) Montrer que la matrice B est unique. On utilisera de la diagonalisation simultanée.
On notera par la suite $B = |A|$.

(e) En déduire que pour tout $A \in Gl_n(\mathbb{R})$, $\exists!(O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ t.q. $A = OS$.

(f) On pose $f : (O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \mapsto OS \in Gl_n(\mathbb{R})$.
Montrer que la fonction f est bijective, et donner une expression de sa bijection réciproque f^{-1}.

2. **Continuité :**
On munit $M_n(\mathbb{R})$ (et ses sous-ensembles) d'une norme $\|.\|$. Montrer que la fonction f est continue.

3. **Compacité :**
Démontrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un compact de $M_n(\mathbb{R})$.

4. **Homéomorphisme :**

   (a) Soit $(A_n)_n \in Gl_n(\mathbb{R})$ une suite qui converge vers $A \in Gl_n(\mathbb{R})$. On pose $A_n = O_n S_n$, et $A = OS$. On veut montrer que $O_n \to_n O$ et que $S_n \to_n S$.
   Montrer qu'il existe une sous-suite $(O_{n_k})_k$ de $(O_n)_n$ qui est convergente.

   (b) Montrer que $\lim_k(O_{n_k}) = O$.

   (c) Montrer que la suite $(O_n)_n$ est convergente vers O. On pourra raisonner par l'absurde.

   (d) En déduire que la suite S_n est convergente vers S.

   (e) Montrer que la fonction f est un homéomorphisme de $O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ vers $Gl_n(\mathbb{R})$.

Dev : Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$

Exercice 19 (**Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$**). Soit $n \geq 1$. On note $|||.|||_2$ la norme sur $M_n(\mathbb{R})$ associée à la norme euclidienne $\|.\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$.
L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de $O_n(R)$ (des $\sum_{i=1}^m t_i O_i$ avec $O_i \in O_n(\mathbb{R})$ et $t_i \in [0,1]$ t.q. $t_1 + \ldots + t_m = 1$).
On veut montrer que l'adhérence de l'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$, $\overline{Conv(O_n(\mathbb{R})}$, est exactement la boule unité fermée pour $|||.|||_2$.

1. **Convexe compact :**

   (a) On rappelle que $O_n(\mathbb{R})$ est un compact. Montrer que $\overline{Conv(O_n(\mathbb{R}))}$ est un compact de $M_n(\mathbb{R})$.

   (b) Montrer que $\overline{Conv(O_n(\mathbb{R}))}$ est encore un ensemble convexe.

2. **Première inclusion :**

   (a) Soit $O \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $|||O|||_2 = 1$.

   (b) Montrer que $\overline{Conv(O_n(\mathbb{R}))} \subset B(O,1)$, la boule unité fermée pour $|||.|||_2$.

3. **Séparation par les formes linéaires :** Soit $M \notin Conv(O_n(\mathbb{R}))$.
Déterminer une forme linéaire $\phi \in M_n(\mathbb{R})^*$ telle que $\phi(M) > \sup_{\overline{Conv(O_n(\mathbb{R}))}}(\phi(O))$. On pourra utiliser un projeté orthogonal.

4. **Inclusion réciproque :** Soient maintenant $N \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $|||N|||_2 \leq 1$, et soit $\psi \in M_n(\mathbb{R})^*$.
On veut montrer que $\psi(N) \leq \sup_{\overline{Conv(O_n(\mathbb{R}))}}(\psi(O))$.
Démontrer qu'il existe une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\psi(.) = M \mapsto Tr(AM)$.

5. Il faut donc démontrer que $Tr(AN) \leq \sup_{\overline{Conv(O_n(\mathbb{R}))}}(Tr(AO))$.
Décomposition polaire généralisée :

   (a) On suppose A inversible. Montrer qu'il existe $\Omega \in On(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = \Omega S$.

   (b) On suppose A non-inversible. Montrer qu'il existe $\Omega \in On(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = \Omega S$. On pourra utiliser la densité de $Gl_n(\mathbb{R})$.

6. Montrer que l'on a $\sup_{\overline{Conv(O_n(\mathbb{R}))}}(Tr(AO)) \geq Tr(S)$.

7. La matrice $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ est-elle diagonalisable ? Dans quel type de base ? Dans quel ensemble sont situées ses valeurs propres ?

8. Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une b.o.n de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de S, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
   (a) Exprimer $Tr(S)$ en fonction des λ_i.
   (b) Montrer que $Tr(AN) \leq \sum_{i=1}^n \|Ae_i\|_2 \||^t N\||_2 \|e_i\|_2$.
   (c) Montrer que $Tr(AN) \leq \sum_{i=1}^n \|Se_i\|_2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.
9. **Conclusion :**
   En déduire que $Tr(AN) \leq \sup_{\overline{Conv(O_n(\mathbb{R}))}} (Tr(AO))$.
10. Montrer que $N \in \overline{Conv(O_n(\mathbb{R}))}$.

Remarque : Dans un ev de dimension finie, l'enveloppe convexe d'un compact est fermée. On a en fait $\overline{Conv(O_n(\mathbb{R}))} = Conv(O_n(\mathbb{R}))$.
Cependant démontrer ce fait n'est pas immédiat (il faut arriver à utiliser l'hypothèse de dimension finie), et c'est pourquoi cet exercice n'en tient pas compte. Mais, on peut très bien l'admettre et dès le début regarder uniquement l'enveloppe convexe.